Přednáška 26. 10. 2010 (Obadalová)

Věta: $\det E = 1$. (E... jednotková matice)

Př

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+0-0-0-0 = \underline{\underline{1}}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Věta: (o element. řádk. úpravách determinantů)

1) Přičtením c-násobku i-tého řádku k j-tému se determinant nezmění. $(i \neq j)$
2) Vynásobením i-tého řádku číslem c se determinant vynásobí prvkem c.
3) Přehozením i-tého a j-tého řádku $(i \neq j)$ determinant změní znaménko.

Důkaz:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

i-tý řádek vynásobíme c a přičteme k j-tému

$$A' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{j1}+cA_{i1} & A_{j2}+cA_{i2} & \dots & A_{jn}+cA_{in} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A' = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A'_{1\sigma_1} \cdot A'_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot A'_{i\sigma_i} \cdot \ldots \cdot A'_{j\sigma_j} \cdot \ldots \cdot A'_{n\sigma_n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A_{1\sigma_1} \cdot \ldots \cdot A_{i\sigma_i} \cdot \ldots \cdot (A_{j\sigma_i} + cA_{i\sigma_i}) \cdot \ldots \cdot A_{n\sigma_n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A_{1\sigma_1} \cdot \ldots \cdot A_{i\sigma_i} \cdot \ldots \cdot A_{j\sigma_j} \cdot \ldots \cdot A_{n\sigma_n} +$$

$$+ \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A_{1\sigma_1} \cdot \ldots \cdot A_{i\sigma_i} \cdot \ldots \cdot c \cdot A_{i\sigma_i} \cdot \ldots \cdot A_{n\sigma_n}$$

$$= \det A + c \cdot 0 = \det A$$

tzn. $\det A' = \det A$ $\square$

Př $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

B... první řádek vynásobíme 3
C... přehodíme 1. a 2. řádek
D... přičteme (−3) násobek 1. řádku k druhému

$\underset{A}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \underline{\underline{-2}}$ $\quad \underset{B}{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \underline{\underline{-6}}$

$\underset{C}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \underline{\underline{2}}$ $\quad \underset{D}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}} = \underline{\underline{-2}}$

$\det B = 3 \cdot \det A$
$\det C = -1 \cdot \det A$
$\det D = \det A$

<u>Věta</u>: Buď A čtvercová matice. Pak
$$\det A = \det A^T.$$

Př $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ $\quad A^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} a & d & g \\ b & e & h \end{matrix}$

$\det A = aei + dhc + gbf - ceg - \boxed{fha} - ibd$

$\det A^T = aei + bfg + cdh - geg - \boxed{hfa} - idb$

<u>Věta</u>: Matice v trojúhelníkovém tvaru má determinant roven součinu prvků na diagonále.

Důkaz: 2 případy:

1) matice má alespoň 1 nulový řádek
podle věty, která říká, že matice s nulovým řádkem má nulový det je $\det A = 0$

2) matice nemá žádný nulový řádek
na diagonále je nejméně poslední prvek nulový, tedy součin jejích prvků $= 0$

matici lze převést na jednotkovou matici
pomocí posledního řádku můžeme vynulovat poslední prvky předch. řádků.
pomocí předposl. řádku můžeme vynulovat předp. prvky předchozích řádků
atd.

Př
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot 2 \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

zatím jsme jen přičítali c-násobek řádku k jinému, což nemění det

$\det E = 1$

když vynásobíme první řádek prvkem A_{11},
$\det(A') = A_{11} \cdot \det E$

vynásobíme druhý řádek prvkem A_{22}
$\det(A') = A_{11} \cdot A_{22} \cdot \det E$

Př
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot 2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

atd.

$\det = 1$ $\det = 3$ $\det = 12$

$$\det(A') = A_{11} \cdot A_{22} \cdot \ldots \cdot A_{nn} \cdot \underbrace{\det E}_{=1}$$

= součin prvků na diagonále $\square$

Př Příklad je zahrnut v důkazu.

Cauchyho věta: Buďte A, B čtvercové matice.

Pak $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Př na cvičení

Věta: Pokud k matici A existuje inverzní matice A^{-1}, pak platí:

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}.$$

Důkaz: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

$$\det A \cdot \det A^{-1} \underset{\text{Cauchyho věta}}{=} \det(A \cdot A^{-1}) = \det E = 1$$

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}$$

$\square$

Věta: Matice A je regulární právě tehdy když je její determinant nenulový a to je právě tehdy když je A invertibilní.

Definice: Buď $\det A$ determinant řádu n. Buď A' matice vzniklá vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Determinant $\det A'$ (řádu $n-1$) označíme $\bar{A}_{ij}$, nazývá se minor. Prvek $\hat{A}_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot \bar{A}_{ij}$ se nazývá kofaktor (nebo algebraický doplněk) prvku A_{ij}.

Laplaceova věta: Pro každý index $i = 1, \dots, n$ platí

$$\det A = \hat{A}_{i1} \cdot A_{i1} + \dots + \hat{A}_{in} \cdot A_{in}$$

(„Laplaceův rozvoj podle i-tého řádku")

Př

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{0 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}_{=0}$$

Laplaceův rozvoj podle 4. řádku ($i=4$)

$$+ \underbrace{0 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}_{=0}$$

$$+ \underbrace{0 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{=0} + (-1) \cdot (-1)^{4+4} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix}}_{=1}$$

$$= (-1) \cdot 1 \cdot 1 = \underline{\underline{-1}}$$